Endomorphismes des espaces euclidiens

Matrices orthogonales

Exercice 1 [00339] [correction]
Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Exercice 2 [00340] [correction]
Soit T une matrice réelle carrée d'ordre n antisymétrique.
Etablir que la matrice $\exp(T)$ est orthogonale.

Exercice 3 [00341] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. En interprétant A comme la matrice de passage entre une base orthonormée d'un espace euclidien et une autre base de cet espace et en orthonormalisant cette dernière, établir qu'il existe deux matrices $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

Exercice 4 Centrale MP [02403] [correction]
a) Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5 Centrale MP [02404] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$
b) Montrer
$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$$
c) Peut-on avoir simultanément :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n} \text{ et } \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n?$$

Exercice 6 Mines-Ponts MP [02742] [correction]
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\exp A$?

Exercice 7 Mines-Ponts MP [02743] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que
$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$$

Exercice 8 Mines-Ponts MP [02744] [correction]
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A.
a) Etudier la convergence de $\frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p)$ lorsque $p \to +\infty$.
b) La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 9 Mines-Ponts MP [02745] [correction]
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$
a) Montrer :
$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}$$
b) Montrer :
$$M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$
c) Montrer que M est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02746] [correction]
Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Quelles sont les A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $J + A$ soit inversible ?

Exercice 11 Mines-Ponts MP [02747] [correction]
Soit
$$M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
où $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D\in\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.
Montrer que
$$(\det A)^2=(\det D)^2$$

Exercice 12 Mines-Ponts MP [02749] [correction]
[Transformation de Cayley]
a) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?
b) Soit
$$\varphi : A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\mapsto (I_n-A)(I_n+A)^{-1}$$
Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur
$$\{\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})/-1\notin\mathrm{Sp}(\Omega)\}$$

Exercice 13 Mines-Ponts MP [02926] [correction]
Soient p,q,r des réels et
$$A=\begin{pmatrix} p & q & r\\ r & p & q\\ q & r & p\end{pmatrix}$$
Montrer que A est une matrice de rotation si, et seulement si, p,q,r sont les trois racines d'un polynôme de la forme X^3-X^2+a où a est à préciser. Indiquer les éléments de la rotation.

Exercice 14 Mines-Ponts MP [02927] [correction]
Soit des réels a,b,c. On pose $A=\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b\\ ab+c & b^2 & bc-a\\ ac-b & bc+a & c^2\end{pmatrix}$.
A quelle condition A est-elle orthogonale ?
Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique A.

Exercice 15 [03141] [correction]
Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Exercice 16 [03171] [correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant
$$A^tA={}^tAA$$
Montrer que la matrice $\Omega={}^tA^{-1}A$ est orthogonale.

Automorphismes orthogonaux

Exercice 17 [00342] [correction]
Soit $f\in\mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.

Exercice 18 [00343] [correction]
Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f\in\mathcal{O}(E)$.
Montrer que $f(F^\perp)=f(F)^\perp$.

Exercice 19 [00344] [correction]
Soient f un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E et $F=\ker(f-\mathrm{Id})$.
Montrer que $f(F^\perp)=F^\perp$.

Exercice 20 [00345] [correction]
Soient $f\in\mathcal{O}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que :
$$V \text{ est stable pour } f \text{ si, et seulement si, } V^\perp \text{ l'est}$$

Exercice 21 [03082] [correction]
Soient E un espace euclidien et $f:E\to E$ une application linéaire vérifiant
$$\forall x,y\in E,(x\mid y)=0\Rightarrow (f(x)\mid f(y))=0$$
a) Calculer $(u+v\mid u-v)$ pour u,v vecteurs unitaires.
b) Etablir qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}^+$ vérifiant
$$\forall x\in E,\|f(x)\|=\alpha\,\|x\|$$
c) Conclure qu'il existe $g\in\mathcal{O}(E)$ vérifiant $f=\alpha.g$

Exercice 22 [00347] [correction]
Soient E un espace euclidien $f : E \to E$ une application. Justifier l'équivalence :

$$\forall (x,y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E)$$

Exercice 23 [00346] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ une application telle que pour tout $x, y \in E$, on ait $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$. En observant que l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée montrer que f est linéaire.

Exercice 24 [03075] [correction]
Soient E un espace euclidien et f une application de E vers E vérifiant

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

a) Montrer que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

b) Etablir que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Justifier que

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, f(e_k)$$

d) En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E.

Exercice 25 [00348] [correction]
Soient a un vecteur d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 et $f_a, r_a \in \mathcal{L}(E)$ définis par

$$f_a(x) = a \wedge x \text{ et } r_a = \exp(f_a)$$

Montrer que r_a est une rotation et en donner les éléments caractéristiques.

Exercice 26 Mines-Ponts MP [02730] [correction]
Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E tels que pour tout sous-espace vectoriel V de E : $f(V^\perp) \subset (f(V))^\perp$?

Exercice 27 Mines-Ponts MP [02731] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \mathrm{tr}\,{}^tAB$.
a) Montrer que φ est un produit scalaire.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}$ pour que $M \mapsto \Omega M$ soit φ-orthogonale.

Exercice 28 Mines-Ponts MP [02740] [correction]
Dans un espace euclidien E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :
(i) f est une isométrie,
(ii) $f^2 = -\mathrm{Id}$,
(iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x.

Exercice 29 X MP [03076] [correction]
Soit $(E, \langle\, ,\rangle)$ un espace euclidien.
Pour $\varphi \in \mathcal{O}(E)$, on note $M(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et $F(\varphi) = \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.
Si $u \in E \setminus \{0\}$, s_u désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$.
a) Soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $M(\varphi) \oplus^\perp F(\varphi) = E$.
b) Si $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre, montrer : $M(s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.
c) On suppose $(u_1, \ldots, u_k)$ libre. Soient $v_1, \ldots, v_k \in E \setminus \{0\}$ tels que $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k} = s_{v_1} \circ \cdots \circ s_{v_k}$.
Montrer que $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre.

Exercice 30 Mines-Ponts MP [02748] [correction]
On note $(\,.\mid.\,)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour toute famille $u = (u_1, \ldots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ on pose

$$M_u = ((u_i \mid u_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

a) Montrer que $(u_1, \ldots u_p)$ est libre si, et seulement si, M_u est inversible.
b) On suppose qu'il existe $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ telles que $M_u = M_v$.
Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(u_i) = f(v_i)$ pour tout i.

Adjoint d'un endomorphisme

Exercice 31 [00349] [correction]
Montrer que $\det f^\star = \det f$.

Exercice 32 [00350] [correction]
Quels sont les automorphismes orthogonaux autoadjoints d'un espace vectoriel euclidien E ?

Exercice 33 [00351] [correction]
Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{C} = (f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(f_i \mid u(e_j))^2$.
a) Montrer que A ne dépend pas des bases choisies.
b) Exprimer A en fonction de u seul.

Exercice 34 [00352] [correction]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{rg}(u^\star \circ u) = \text{rg}(u) = \text{rg}(u \circ u^\star)$.

Exercice 35 [00353] [correction]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comparer $\ker u$ et $\ker(u^\star \circ u)$ d'une part puis $\text{Im}u$ et $\text{Im}(u \circ u^\star)$ d'autre part.

Exercice 36 [00354] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer
$$\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}A$$

Exercice 37 [00355] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^2 = 0$.
Etablir
$$\ker(u + u^\star) = \ker u \cap \ker u^\star$$

Exercice 38 [00356] [correction]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace vectoriel euclidien.
a) Montrer
$$\ker u^\star = \text{Im}u^\perp \text{ et } \text{Im}u^\star = \ker u^\perp$$
b) On suppose $u^2 = 0$. Etablir :
$$u + u^\star \text{ inversible } \Leftrightarrow \text{Im}u = \ker u$$

Exercice 39 [00357] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ non nul.
On considère $f : x \to u \wedge x$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
En déterminer image et noyau.
b) Déterminer $f^\star$.
c) Montrer que f^2 est diagonalisable dans une base orthonormée.

Exercice 40 [00358] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
Montrer que $\|f^\star(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 41 [00359] [correction]
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout x de E.
a) Montrer que si $f(x) = x$ alors $f^\star(x) = x$.
b) $E = \ker(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.

Exercice 42 Centrale MP [02397] [correction]
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme de E.
a) Réduire l'expression $\varphi(x, y, z) = [u(x), y, z] + [x, u(y), z] + [x, y, u(z)]$.
b) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,
$v(x \wedge y) = u(x) \wedge y - u(y) \wedge x$.

Exercice 43 Mines-Ponts MP [02737] [correction]
Soit E un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer l'équivalence de :
(i) $f^\star = -f$,
(ii) il existe $w \in E$ tel que $f(x) = w \wedge x$ pour tout $x \in E$.

Exercice 44 Mines-Ponts MP [02738] [correction]
Soit E un espace euclidien de norme $\|\,.\,\|$, u dans $\mathcal{L}(E)$ et $\|\,.\,\|_{\mathcal{L}(E)}$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\,.\,\|$.
a) Comparer $\|u\|_{\mathcal{L}(E)}$ et $\|u^\star\|_{\mathcal{L}(E)}$.
b) Si $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$, comparer $\ker(u - \text{Id})$ et $\ker(u^\star - \text{Id})$.
c) Si $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$, montrer $E = \ker(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id})$.

Exercice 45 Mines-Ponts MP [02739] [correction]
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$. Montrer que
$\mathrm{Im} u = \ker u \Leftrightarrow u + u^\star \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 46 [03149] [correction]
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Exprimer $\ker(u^\star \circ u)$ et $\mathrm{Im}(u^\star \circ u)$ en fonction de $\ker u$.

Endomorphisme autoadjoint

Exercice 47 [00361] [correction]
Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que les espaces $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 48 [00362] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que $f \circ g$ est symétrique si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 49 [01751] [correction]
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.
a) Montrer que

$$f(x) = x + k(x \mid a)a$$

définit un endomorphisme autoadjoint de E.
b) Etudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 50 [00363] [correction]
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $p^\star = p$.

Exercice 51 [00364] [correction]
Soit f un endomorphisme symétrique de E vérifiant $\forall x \in E$, $(f(x) \mid x) = 0$.
Déterminer f.

Exercice 52 [00365] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.
a) Montrer que $u = f^\star \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles
b) Etablir $\ker u = \ker f$ puis $\mathrm{Im} u = (\ker f)^\perp$

Exercice 53 [00366] [correction]
Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité et rangées en ordre croissant.
Montrer

$$\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

Exercice 54 [00367] [correction]
Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
On note $\|u\|$ la norme de l'endomorphisme u subordonnée à la norme euclidienne.
Etablir $\|u\| = \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$.

Exercice 55 [00368] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$ sa sphère unité.
Pour $p \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathcal{V}_p$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension p. Pour f un endomorphisme autoadjoint de E, on note $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité.
Etablir :

$$\lambda_p = \min_{V \in \mathcal{V}_p} \max_{x \in S \cap V} (f(x) \mid x)$$

Exercice 56 Mines-Ponts MP [02741] [correction]
Soit $K \in \mathcal{C}\left([0,1]^2, \mathbb{R}\right)$ non nulle telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, K(x,y) = K(y,x)$. On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit $\Phi(f) : x \in [0,1] \to \int_0^1 K(x,y) f(y) \mathrm{d}y \in \mathbb{R}$.
a) Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
b) L'application Φ est-elle continue pour $\|\|_\infty$? pour $\|\|_1$?
c) Montrer que Φ est autoadjoint pour le produit scalaire associé à $\|\|_2$ sur E.
Soit $\Omega = \left[\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 |K(x,y)| \,\mathrm{d}y\right]^{-1}$.
d) Montrer : $\forall \lambda \in \left]-\Omega, \Omega\right[, \forall h \in E, \exists! f \in E, h = f - \lambda \Phi(f)$.
e) Si $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, montrer que : $\dim \ker(\Phi - \lambda \mathrm{Id}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0,1]^2} K(x,y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 57 Centrale MP [03189] [correction]
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{GL}(E)$.
a) Démontrer l'existence d'une base orthonormée de E transformée par f en une base orthogonale.
b) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence de deux matrices orthogonales U et V telles que UMV soit diagonale.
Même question avec M non inversible.
c) Application

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices symétriques

Exercice 58 Mines-Ponts MP [01330] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.
a) Montrer que ${}^tAA = 0$.
b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 59 [00369] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable à valeurs propres positives.

Exercice 60 [00370] [correction]
Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n.
a) Montrer que

$$\chi_{{}^tAA} = \chi_{A^tA}$$

b) Montrer que ${}^tAA$ et A^tA sont semblables.

Exercice 61 [00371] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \frac{1}{2}\left({}^tA + A\right)$.
On note α la petite valeur propre de B et β sa plus grande.
Etablir $\mathrm{Sp}A \subset [\alpha, \beta]$.

Exercice 62 [00372] [correction]
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives. Etablir $(\det A)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{tr}A$.

Exercice 63 [02600] [correction]
On étudie l'équation $M^tMM = I_n$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'une solution est une matrice symétrique.
b) En déduire les solutions de l'équation étudiée.

Exercice 64 Centrale MP [02401] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, si $A^tA = B^tB$, qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = AQ$.

Exercice 65 Mines-Ponts MP [02750] [correction]
Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$, que vaut M^2 ?

Exercice 66 Mines-Ponts MP [02751] [correction]
Montrer que le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de ${}^tAA$.

Exercice 67 Mines-Ponts MP [02757] [correction]
Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficient sont égaux à 1. Trouver $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que ${}^tPJP = D$.

Exercice 68 X MP [03077] [correction]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Etablir l'existence de $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $N = UMV$ vérifie :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow N_{i,j} = 0$$

Exercice 69 [03088] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & (0) \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ (0) & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

vérifiant $b_kc_k > 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale inversible D vérifiant

$$D^{-1}AD \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

b) En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 70 [03161] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Etablir

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Exercice 71 [03162] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 72 [03163] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et A^tA sont orthogonalement semblable i.e.

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), {}^t\Omega({}^tAA)\Omega = A^tA$$

Matrices antisymétriques

Exercice 73 [00374] [correction]
Un endomorphisme f d'une espace vectoriel euclidien est dit antisymétrique si $f^\star = -f$.
a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est antisymétrique si, et seulement si,

$$\forall x \in E, (f(x) \mid x) = 0$$

On suppose désormais que E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
b) Soit $u \in E$. Montrer que $f : x \mapsto u \wedge x$ est un endomorphisme antisymétrique de E.
c) Inversement, soit f un endomorphisme antisymétrique de E. Etablir qu'il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $f(x) = u \wedge x$ pour tout $x \in E$.

Exercice 74 [00373] [correction]
Montrer que tout matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

Exercice 75 [03084] [correction]
Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif ou nul.

Exercice 76 [00375] [correction]
Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est dit antisymétrique si

$$\forall x \in E, (u(x) \mid x) = 0$$

Soit u un endomorphisme antisymétrique.
a) Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles pour u ?
A quelle condition un endomorphisme antisymétrique est-il diagonalisable ?
b) Etablir que, pour tout $x, y \in E$,

$$(u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$$

En déduire que la matrice A dans une base orthonormée d'un endomorphisme antisymétrique est elle-même antisymétrique.
c) Soient A une matrice antisymétrique réelle, λ une valeur propre complexe de la matrice A et X un vecteur propre associé.
En étudiant ${}^t\bar{X}AX$, établir que $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Exercice 77 Mines-Ponts MP [02758] [correction]
a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E et f dans $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x, y \in E, \varphi(f(x), y) = -\varphi(x, f(y))$$

Montrer que f est de rang pair.
b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que le commutant de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de codimension paire.

Exercice 78 X MP [02915] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale des zéros et des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Les matrices diagonales avec coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1. Le résultat s'obtient en étendant les colonnes de la première à la dernière, en exploitant qu'elles sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Exercice 2 : [énoncé]
Par continuité de l'application linéaire de transposition, on justifie

$$^t\exp(T) = \exp(^tT)$$

Par suite

$$^t\exp(T)\exp(T) = \exp(-T)\exp(T)$$

Or T et $-T$ commutent donc

$$\exp(-T)\exp(T) = \exp(-T+T) = I_n$$

et on conclut.

Exercice 3 : [énoncé]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, on note $\mathcal{B}$ sa base canonique et $\mathcal{B}'$ la famille d'éléments de $\mathbb{R}^n$ déterminée par $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$. La famille $\mathcal{B}'$ est libre, on peut donc l'orthonormaliser par le procédé de Schmidt en une famille $\mathcal{B}''$. Par changement de base, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'' \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\mathcal{B}'$ avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B},\mathcal{B}''$ orthonormées et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\mathcal{B}' \in T_n^+(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}''$ obtenue par le procédé de Schmidt.

Exercice 4 : [énoncé]
a) Les valeurs propres d'une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ne pouvant être que 1 et -1, celle-ci vérifie $U^2 = I_n$. Les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ sont les matrices des symétries orthogonales.
b) Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On peut construire une base orthonormée de trigonalisation de tout endomorphisme complexe donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P^\star P = I_n$ et $P^\star UP \in T_n^+(\mathbb{R})$. Or $(P^\star UP)^\star = P^\star U^{-1}P = (P^\star UP)^{-1}$ donc $P^\star UP$ est diagonale et ses éléments diagonaux sont de module 1.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n 1^2} = \sqrt{n}$$

donc $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.
b) Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$, on vérifie $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = {}^tXAX$. Or ${}^tXAX = (X \mid AX)$ donc toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|{}^tXAX| \leqslant \|X\|\,\|AX\|$. Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.
c) On peut avoir l'égalité si $n = 1$ mais aussi si $n = 4$ avec

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

En fait, un approfondissement du problème donne $\sqrt{n} \in 2\mathbb{Z}$ condition nécessaire à l'obtention de l'égalité.

Exercice 6 : [énoncé]
Par continuité de la transposition ${}^t(\exp A) = \exp({}^tA)$.
On a alors ${}^t(\exp A)\exp A = \exp(-A)\exp(A) = \exp(-A+A) = \exp(O_n) = I_n$ car A et $-A$ commutent.
Ainsi $\exp A$ est une matrice orthogonale.

Exercice 7 : [énoncé]
Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$, on vérifie $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = {}^tXAX$. Or ${}^tXAX = (X \mid AX)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|{}^tXAX| \leqslant \|X\|\,\|AX\|$. Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) Posons $U_p = \frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p)$.
On a $(I - A)U_p = \frac{1}{p+1}(I_n - A^{p+1}) \to 0$ car pour la norme euclidienne :
$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{n}$.
Puisque $1 \notin \mathrm{Sp}A$, $U_p \to 0$.
b) Par l'absurde si A^p converge vers B alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$A^{p+1}X = AA^pX$ donne à la limite $BX = ABX$. Or $1 \notin \mathrm{Sp}A$ donc $BX = 0$ et puisque ceci vaut pour tout X, $B = 0$.
Or $\|A^p\| = \sqrt{n} \not\to 0$. Absurde.
La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 9 : [énoncé]
a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$$

Puisque $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma$, on obtient

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1$$

b) En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

puis

$$\det M = (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix}$$

et enfin

$$\det M = (a + b + c)\left((a - b)(a - c) + (b - c)^2\right)$$

Ainsi

$$\det M = S\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right) = S^3$$

car $\sigma = 0$.
Finalement $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S = 1$.
c) a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si, et seulement si,
$X^3 - X^2 + k = (X - a)(X - b)(X - c)$.
En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \\ abc = -k \end{cases}$$

De plus, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles si, et seulement si, $k \in [0, 4/27]$.
En effet, considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 + k$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x(3x - 2)$.
Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0) \geqslant 0$ et $f(2/3) \leqslant 0$.
Cela fournit les conditions $k \geqslant 0$ et $k \leqslant 4/27$.
Inversement, si $k \in [0, 4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)
Ainsi, si $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$.
Inversement, si $k \in [0, 4/27]$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines a, b, c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : [énoncé]
$J + A$ n'est pas inversible si, et seulement si, il existe une colonne non nulle vérifiant $AX = -JX$.
On a alors ${}^tAJX = -X$ et donc $-1 \in \mathrm{Sp}({}^tAJ) = \mathrm{Sp}(JA)$ avec une réciproque immédiate.
Le polynôme caractéristique de JA étant $(-1)^n X^{n-1}(X - \sum_{i,j} a_{i,j})$, on obtient le critère :
$J + A$ est inversible si, et seulement si, $\sum_{i,j} a_{i,j} \neq -1$

Exercice 11 : [énoncé]
Introduisons

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA & O_{p,n-p} \\ {}^tB & I \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & B \\ C^tA + D^tB & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^tM = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & A^tC + B^tD \\ C^tA + D^tB & C^tC + D^tD \end{pmatrix} = I_n$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on en déduit

$$\det M \times \det {}^tA = \det D$$

Sachant $\det M = 1$, la conclusion est dès lors facile.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne propre associée.
D'une part ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}X$, d'autre part ${}^t\bar{X}AX = {}^t\overline{AX}X = -\bar{\lambda}{}^t\bar{X}X$.
Puisque ${}^t\bar{X}X \in \mathbb{R}^{+\star}$, on obtient $\bar{\lambda} = -\lambda$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.
b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \varphi(A)$ est bien définie car $-1 \notin \mathrm{Sp}A$.
${}^t\Omega\Omega = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ or $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent donc ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
De plus, si $\Omega X = -X$ alors $(I_n - A)X = -(I_n + A)X$ (car $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent) et donc $X = 0$.
Ainsi l'application $\varphi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / -1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)\}$ est bien définie.
Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $(I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$. En développant et en simplifiant on obtient $A = B$ et donc l'application φ est injective.
Enfin soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)$.
Posons $A = (\Omega + I_n)^{-1}(I_n - \Omega)$ qui est bien définie car $-1 \notin \mathrm{Sp}\Omega$.
On a
${}^tA = (I_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + I_n)^{-1} = (\Omega - I_n)\Omega^{-1}\Omega(I_n + \Omega)^{-1} = (\Omega - I_n)(I_n + \Omega)^{-1} = -A$
et $\varphi(A) = \Omega$.
Finalement φ est bijective.

Exercice 13 : [énoncé]
A est une matrice de rotation si, et seulement si, $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$ ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ pq + qr + rp = 0 \\ p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 1 \end{cases}$$

(le déterminant se calculant par Sarrus).
Posons $\sigma_1 = p + q + r$, $\sigma_2 = pq + qr + rq$, $\sigma_3 = pqr$, $S_2 = p^2 + q^2 + r^2$, $S_3 = p^3 + q^3 + r^3$ et $t = p^2q + pq^2 + q^2r + qr^2 + t^2p + tp^2$
Si (p, q, r) est solution du système alors $\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_1$ donne $\sigma_1 = \pm 1$.
De plus $\sigma_1\sigma_2 = 0$ donne $t + 3\sigma_3 = 0$ et donc
$\sigma_1 = \sigma_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3 = S_3 - 3\sigma_3 = 1$.
Ainsi p, q, r sont les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + a$.
Inversement, on vérifie que les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + a$ satisfont le système.
Il ne reste plus qu'à étudier à quelle condition sur a ces trois racines sont réelles.
L'étude des variations de P donne la condition nécessaire et suffisante suivante

$$P(0) \geqslant 0 \text{ et } P(2/3) \leqslant 0$$

i.e. $a \in [0, 4/27]$.
La rotation alors obtenue est d'axe dirigé et orienté par $(1, 1, 1)$ et d'angle θ avec $\cos\theta = \frac{3p-1}{2}$ et $\sin\theta$ du signe de $q - r$.

Exercice 14 : [énoncé]
On a $\|C_1\|^2 = a^2(a^2 + b^2 + c^2) + b^2 + c^2$ et $(C_1 \mid C_2) = ab(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$.
Si A est orthogonale alors $\|C_1\|^2 + \|C_2\|^2 + \|C_3\|^2 = 3$ donne
$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3$ et puisque $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 0$, on obtient $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Réciproquement, si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ alors on vérifie $\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1$ et $(C_1 \mid C_2) = (C_2 \mid C_3) = (C_3 \mid C_1) = 0$ donc A est orthogonale.
Supposons maintenant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et posons $u = (a, b, c)$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ est celle de l'application $x \mapsto (u \mid x)u$.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ est celle de l'application $x \mapsto u \wedge x$.
L'application étudiée est donc $x \mapsto (x \mid u)u + u \wedge x$ qui est la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle $\pi/2$.

Exercice 15 : [énoncé]
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
Montrons que chaque colonne de A ne comporte qu'au plus un coefficient non nul.
Par l'absurde, supposons que la $j$ème colonne de A possède au moins deux coefficients non nuls situés en $k$ème et en ℓème ligne. Puisque les colonnes de A

sont orthogonales, on a pour tout $j' \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = 0$$

Sachant que tous les coefficients sont positifs, cette équation équivaut à

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, a_{i,j}a_{i,j'} = 0$$

et on en tire

$$a_{k,j'} = a_{\ell,j'} = 0$$

Ainsi les $n-1$ colonnes correspondant aux indices autres que j appartiennent à l'espace formé des colonnes dont les $k$ème et ℓème coefficients sont nuls. Or ces $n-1$ colonnes sont indépendantes et cet espace est de dimension $n-2$. C'est absurde.

Puisque les colonnes de A sont de norme 1 et que ses coefficients sont positifs, sur chaque colonne figure un 1 et $n-1$ coefficients nuls.

Le même raisonnement peut être adapté aux lignes de A pour affirmer que chacune d'elles contient un coefficient 1 et $n-1$ coefficients nuls.

Inversement, on vérifie aisément qu'une telle matrice est une matrice orthogonale à coefficients positifs.

En fait, les matrices considérés sont les matrices de permutation, il y en a $n!$

Exercice 16 : [énoncé]

On a

$$\Omega^t\Omega = {}^tA^{-1}A^tAA^{-1}$$

Or A et ${}^tA$ commutent donc

$$\Omega^t\Omega = {}^tA^{-1t}AAA^{-1} = I_n$$

Exercice 17 : [énoncé]

Soit λ valeur propre de f. Pour x vecteur propre, on a $f(x) = \lambda x$ avec $\|f(x)\| = \|x\|$ d'où $\lambda = \pm 1$. Une diagonalisation de f est alors réalisée avec des 1 et des -1 sur la diagonale, c'est une symétrie.

Exercice 18 : [énoncé]

f étant un automorphisme, $\dim f(F) = \dim F$ et $\dim f(F^\perp) = \dim F^\perp$. Par suite

$$\dim f(F^\perp) = \dim f(F)^\perp$$

Soient $x \in f(F^\perp)$ et $y \in f(F)$. On peut écrire $x = f(a)$ et $y = f(b)$ avec $a \in F^\perp$ et $b \in F$. On a

$$(x \mid y) = (f(a) \mid f(b)) = (a \mid b) = 0$$

donc $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$ puis l'égalité par les dimensions.

Exercice 19 : [énoncé]

Soit $y \in f(F^\perp)$. Il existe $x \in F^\perp$ tel que $y = f(x)$. On a alors $\forall z \in F$, $(y \mid z) = (f(x) \mid f(z)) = (x \mid z) = 0$.

Par suite $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

De plus f conserve les dimensions car c'est un automorphisme donc il y a égalité.

Exercice 20 : [énoncé]

($\Rightarrow$) Si V est stable pour f alors $f(V) \subset V$ et puisque f est un automorphisme $f(V) = V$.

$\forall x \in V^\perp, \forall y \in V, (f(x) \mid y) = (x \mid f^{-1}(y)) = 0$ car $f^{-1}(y) \in V$ donc $f(x) \in V^\perp$ puis $V^\perp$ stable par f.

($\Leftarrow$) Si $V^\perp$ stable par f alors $V = V^{\perp\perp}$ aussi

Exercice 21 : [énoncé]

a) $(u+v \mid u-v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ pour u et v unitaires.

b) Soient u et v des vecteurs unitaires de E.

$u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux donc $f(u+v)$ et $f(u-v)$ le sont aussi.

Or par linéarité

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(u-v) = f(u) - f(v)$$

de sorte que l'orthogonalité de ces deux vecteurs entraîne

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

Ainsi les vecteurs unitaires de E sont envoyés par f sur des vecteurs ayant tous la même norme $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Montrons qu'alors

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

Soit $x \in E$.

Si $x = 0$ alors on a $f(x) = 0$ puis $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

Si $x \neq 0$ alors en introduisant le vecteur unitaire $u = x/\|x\|$, on a $\|f(u)\| = \alpha$ puis $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$

c) Si $\alpha = 0$ alors $f = \tilde{0}$ et n'importe quel $g \in \mathcal{O}(E)$ convient.
Si $\alpha \neq 0$ alors introduisons l'endomorphisme

$$g = \frac{1}{\alpha} f$$

La relation obtenue en b) assure que g conserve la norme et donc $g \in \mathcal{O}(E)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 22 : [énoncé]
($\Leftarrow$) Par définition.
($\Rightarrow$) Le problème est de montrer que f est linéaire.
Soient $x \in E$et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = \|f(\lambda x)\|^2 - 2\lambda(f(\lambda x) \mid f(x)) + \lambda^2 \|f(x)\|^2$
or $\|f(\lambda x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$, $(f(\lambda x) \mid f(x)) = (\lambda x \mid x) = \lambda(x \mid x)$ et $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$
donc $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$.
Ainsi $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Soient $x, y \in E$, $\|f(x+y) - (f(x) + f(y))\|^2 = \|f(x+y)\|^2 - 2(f(x+y) \mid f(x) + f(y)) + \|f(x) + f(y)\|^2$
or $\|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$,
$(f(x+y) \mid f(x) + f(y)) = (f(x+y) \mid f(x)) + (f(x+y) \mid f(y)) = (x+y \mid x+y)$
et $\|f(x) + f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2(f(x) \mid f(y)) + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$
donc $\|f(x+y) - (f(x) + f(y))\|^2 = 0$ et ainsi $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Finalement f est linéaire.
De plus f conserve le produit scalaire donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 23 : [énoncé]
f transforme une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ en une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x) \mid e'_i)e'_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (x \mid e_i)e'_i$ d'où la linéarité de f.

Exercice 24 : [énoncé]
a) Pour $y = 0$, la relation $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ donne $\|f(x)\| = \|x\|$ sachant $y = 0$.
b) Pour $y = -x$, la relation $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ donne $f(-x) = -f(x)$.
Par polarisation

$$(f(x) \mid f(y)) = \frac{1}{4}\left(\|f(x) + f(y)\|^2 + \|f(x) - f(y)\|^2\right)$$

Or $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ et
$\|f(x) + f(y)\| = \|f(x) - f(-y)\| = \|x - (-y)\| = \|x + y\|$
donc

$$(f(x) \mid f(y)) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = (x \mid y)$$

c) Par conservation du produit scalaire, on peut affirmer que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E. Par suite, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(e_k) \mid f(x))\, f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, f(e_k)$$

d) L'expression ci-dessus assure la linéarité de f et puisqu'on sait déjà que f conserve le produit scalaire, on peut affirmer que f est un automorphisme orthogonal.

Exercice 25 : [énoncé]
Si $a = 0$, $r_a = \mathrm{Id}$.
Si $a \neq 0$ alors dans une base orthonormée directe de premier vecteur $a/\|a\|$, la matrice de f_a est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}$$

Par calcul, la matrice de r_a dans cette base est alors

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\|a\| & -\sin\|a\| \\ 0 & \sin\|a\| & \cos\|a\| \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme r_a est donc une rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle $\|a\|$.

Exercice 26 : [énoncé]
Un tel endomorphisme conserve l'orthogonalité. Pour tout x, y vérifiant $\|x\| = \|y\|$, on a $x + y$ et $x - y$ orthogonaux donc $f(x) + f(y)$ et $f(x) - f(y)$ aussi. Par suite $\|f(x)\| = \|f(y)\|$. Ainsi un tel endomorphisme transforme une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ en une famille orthogonale aux vecteurs isométriques. Par suite $f = \lambda g$ avec $g \in \mathcal{O}(E)$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 27 : [énoncé]
a) On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Posons $f : M \mapsto \Omega M$. $(f(M) \mid f(N)) = \text{tr}({}^tM{}^t\Omega\Omega N)$.
f est φ-orthogonale si, et seulement si, pour tout $M, N \in \mathcal{M}$,
$(M \mid {}^t\Omega\Omega N) = (M \mid N)$ i.e. pour tout $N \in \mathcal{M}$, ${}^t\Omega\Omega N = N$ i.e. ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
Ainsi f est φ-orthogonale si, et seulement si, Ω l'est.

Exercice 28 : [énoncé]
On observe que (i) équivaut à $f^\star = f^{-1}$ et (ii) équivaut à $f^{-1} = -f$.
Observons que (iii) équivaut à $f^\star = -f$.
Supposons (iii), pour tout $x, y \in E$, $(f(x+y) \mid x+y) = 0$ donne
$(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$ donc $f^\star = -f$. La réciproque est immédiate.
Ainsi les propriétés (i), (ii) et (iii) retraduites, il est immédiat de conclure.

Exercice 29 : [énoncé]
a) Soient $y \in M(\varphi)$ et $x \in F(\varphi)$.
$\varphi(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = \varphi(a) - a$.
On a alors
$$\langle x, y\rangle = \langle x, \varphi(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0$$
car $\varphi \in \mathcal{O}(E)$.
Ainsi $M(\varphi)$ et $F(\varphi)$ sont orthogonaux et par la formule du rang
$$\dim M(\varphi) + \dim F(\varphi) = \dim E$$
donne
$$M(\varphi) \oplus^\perp F(\varphi) = E$$
b) Par récurrence sur $k \geqslant 1$.
Pour $k = 1$: la propriété est immédiate.
Supposons la propriété vraie au rang $k \geqslant 1$.
Soient $(u_1, \ldots, u_{k+1})$ une famille libre et $\varphi = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_{k+1}} \in \mathcal{O}(E)$. Etudions $F(\varphi)$.
Soit $x \in F(\varphi)$. La relation $\varphi(x) = x$ donne
$$s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}(x) = s_{u_{k+1}}(x)$$
puis
$$s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}(x) - x = s_{u_{k+1}}(x) - x$$
Or $s_{u_{k+1}}(x) - x \in \text{Vect}(u_{k+1})$ et par hypothèse de récurrence
$s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}(x) - x \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.
Puisque la famille $(u_1, \ldots, u_{k+1})$ est libre, on obtient
$$s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}(x) - x = s_{u_{k+1}}(x) - x = 0$$
Ainsi x est point fixe de $s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k}$ et de s_{u_k} et donc
$$x \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)^\perp \cap \text{Vect}(u_{k+1})^\perp = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{k+1})^\perp$$
Par suite
$$F(\varphi) \subset \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{k+1})^\perp$$
L'autre inclusion étant immédiate, on obtient
$$F(\varphi) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{k+1})^\perp$$
puis
$$M(\varphi) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{k+1})$$
Récurrence établie.
c) Posons
$$\varphi = s_{u_1} \circ \cdots \circ s_{u_k} = s_{v_1} \circ \cdots \circ s_{v_k}$$
Par l'étude qui précède
$$F(\varphi) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)^\perp$$
De façon immédiate
$$\text{Vect}(v_1, \ldots, v_k)^\perp \subset F(\varphi)$$
En passant à l'orthogonal
$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k) \subset \text{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$$
Puisque la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est supposé libre, un argument de dimension permet d'affirmer que la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ l'est aussi.

Exercice 30 : [énoncé]
a) Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de M_u.
Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant
$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$. On a alors $(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid u_i) = 0$ pour tout i et donc
$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$. Ainsi M_u n'est pas inversible.
Inversement, supposons M_u non inversible. alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$ et donc $(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid u_i) = 0$ pour tout i.
Ainsi $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^\perp$, or
$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ donc $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$ et la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée.

b) Posons $r = \text{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ et quitte à permuter les vecteurs, supposons que les r premiers vecteurs de la famille u sont indépendants.
Par l'étude qui précède, on peut affirmer que les r premiers vecteurs de la famille v sont alors indépendants et que les autres en sont combinaisons linéaires.
Considérons alors l'application linéaire $h : \text{Vect}(u_1, \ldots, u_r) \to \text{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$ déterminée par $\forall 1 \leqslant k \leqslant r, h(u_k) = v_k$.
Pour tout $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$, on a $h(x) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.
Or

$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \lambda_j (u_i \mid u_j) \text{ et } \|h(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i \lambda_j (v_i \mid v_j)$$

donc $\|x\|^2 = \|h(x)\|^2$ car $(u_i \mid u_j) = (v_i \mid v_j)$.
Pour tout $k \in \{r+1, \ldots, p\}$, u_k est combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_r$ ce qui permet d'écrire $u_k = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.
On a alors pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$(u_k - (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) \mid u_i) = 0$$

et donc

$$(v_k - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) \mid v_i) = 0$$

On en déduit $v_k = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ puis $v_k = h(u_k)$.
Enfin, on prolonge h en un automorphisme orthogonal solution défini sur $\mathbb{R}^n$ en introduisant une application linéaire transformant une base de $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_r)^\perp$ en une base de $\text{Vect}(v_1, \ldots, v_r)^\perp$

Exercice 31 : [énoncé]
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f^\star =^t \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

Exercice 32 : [énoncé]
Ce sont les symétries orthogonales.

Exercice 33 : [énoncé]
a) $A = \sum_{j=1}^{n} \|u(e_j)\|^2$ ne dépend par de $\mathcal{C}$ et $A = \sum_{i=1}^{n} \|u^\star(f_i)\|^2$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.
b) En prenant $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (e_i \mid u(e_j)) (e_j \mid u^\star(e_i))$.
Notons $M = (m_{i,j})$ la matrice de u dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.
$m_{i,j} = (e_i \mid u(e_j))$ et $m_{j,i} = (e_i \mid u^\star(e_j))$ donc $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{j,i}$.
Or $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{j,i}$ est le coefficient d'indice (i,i) de la matrice $M^t M$ représentative de $uu^\star$ donc $A = \text{tr}(uu^\star)$.

Exercice 34 : [énoncé]
On sait $\ker u \subset \ker(u^\star \circ u)$ et si $x \in \ker(u^\star \circ u)$ alors $u^\star(u(x)) = 0$ donc $(u^\star(u(x)) \mid x) = 0$ puis $\|u(x)\|^2 = 0$ donc $x \in \ker u$. Ainsi $\ker u = \ker u^\star \circ u$ puis $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^\star \circ u)$. Enfin $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^\star) = \text{rg}(u^{\star\star} \circ u^\star) = \text{rg}(u \circ u^\star)$.

Exercice 35 : [énoncé]
On sait $\ker u \subset \ker(u^\star \circ u)$ et si $x \in \ker(u^\star \circ u)$ alors $u^\star(u(x)) = 0$ donc $(u^\star(u(x)) \mid x) = 0$ puis $\|u(x)\|^2 = 0$ donc $x \in \ker u$. Ainsi $\ker u = \ker u^\star \circ u$. Il en découle $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^\star \circ u)$ puis $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^\star) = \text{rg}(u^{\star\star} \circ u^\star) = \text{rg}(u \circ u^\star)$. Or $\text{Im}(u \circ u^\star) \subset \text{Im} u$ donc $\text{Im}(u \circ u^\star) = \text{Im} u$.

Exercice 36 : [énoncé]
Si $X \in \ker A$ alors $X \in \ker {}^t AA$.
Inversement, si $X \in \ker {}^t AA$ alors ${}^t AAX = 0$ donc ${}^t X {}^t AAX = {}^t (AX) AX = 0$ d'où $AX = 0$ puis $X \in \ker A$.
Ainsi

$$\ker({}^t AA) = \ker A$$

puis par la formule du rang

$$\text{rg}({}^t AA) = \text{rg} A$$

Exercice 37 : [énoncé]
Evidemment $\ker(u + u^\star) \supset \ker u \cap \ker u^\star$. Inversement, soit $x \in \ker(u + u^\star)$. On a $u(x) + u^\star(x) = 0$ donc $u(u^\star(x)) = 0$ et $u^\star(x) \in \ker u$ or $u^\star(x) \in \text{Im} u^\star = \ker u^\perp$ donc $u^\star(x) = 0$ puis aussi $u(x) = 0$ et donc $x \in \ker u \cap \ker u^\star$. On peut conclure quant à l'égalité demandée.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Soit $x \in \ker u^\star$. Pour tout $y \in \text{Im} u$, on peut écrire $y = u(a)$ et $(x \mid y) = (u^\star(x) \mid a) = (0 \mid a) = 0$ donc $\ker u^\star \subset \text{Im} u^\perp$.
Soit $x \in \text{Im} u^\perp$, $\forall a \in E$, $(u^\star(x) \mid a) = (x \mid u(a)) = 0$ donc $u^\star(x) = 0$ d'où $\text{Im} u^\perp \subset \ker u^\star$.
Puisque $u^{\star\star} = u$ on a aussi $\text{Im} u^{\star\perp} = \ker u$ d'où $\text{Im} u^\star = \ker u^\perp$.

b) On suppose $\mathrm{Im} u \subset \ker u$.
($\Rightarrow$) Supposons $u + u^\star$ inversible.
Soit $x \in \ker u \cap \mathrm{Im} u^\perp$. On a $u(x) + u^\star(x) = 0$ donc $x = 0$. Par suite $\ker u \cap \mathrm{Im} u^\perp = \{0\}$.
Donc $\dim \ker u + \dim \mathrm{Im} u^\perp \leqslant \dim E$ puis $\dim \ker u \leqslant \dim \mathrm{Im} u$. Par suite $\mathrm{Im} u = \ker u$.
($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Im} u = \ker u$.
Soit $x \in \ker(u + u^\star)$. $u(x) + u^\star(x) = 0$.
Or $u(x) \in \mathrm{Im} u$ et $u^\star(x) \in \mathrm{Im} u^\star = (\ker u)^\perp = (\mathrm{Im} u)^\perp$ donc $u(x) = u^\star(x) = 0$.
Par suite $x \in \ker u$ et $x \in \ker u^\star = \mathrm{Im} u^\perp = \ker u^\perp$ donc $x = 0$.
Par suite $u + u^\star$ est injectif donc bijectif.

Exercice 39 : [énoncé]
a) Il est clair que $f \in \mathcal{L}(E)$. $\ker f = \mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Im} f = \{u\}^\perp$ par inclusion et égalité des dimensions.
b) Soit matriciellement, soit
$(u \wedge x \mid y) = \mathrm{Det}(u, x, y) = \mathrm{Det}(y, u, x) = (y \wedge u \mid x) = (-f(y) \mid x)$ donc $f^\star = -f$.
c) $(f^2)^\star = f^2$ donc f^2 est diagonalisable dans une base orthonormée.

Exercice 40 : [énoncé]
Version longue : $\|f^\star(x)\|^2 = (f \circ f^\star(x) \mid x) \leqslant \|f(f^\star(x))\| \|x\| \leqslant \|f^\star(x)\| \|x\|$ donc $\|f^\star(x)\| \leqslant \|x\|$ que $\|f^\star(x)\| = 0$ ou non.
Version rapide : $\|f^\star\|_{\mathcal{L}(E)} = \|f\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 41 : [énoncé]
a) Pour $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|f(x + \lambda y)\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2$.
En développant, on obtient $2\lambda(x \mid f(y)) + \lambda^2 \|f(y)\|^2 \leqslant 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2$.
Quand $\lambda \to 0^+$, cette relation entraîne $(x \mid f(y)) \leqslant (x \mid y)$.
Quand $\lambda \to 0^-$, cette relation entraîne $(x \mid f(y)) \geqslant (x \mid y)$
On en déduit $(x \mid f(y)) = (x \mid y)$ or $(x \mid f(y)) = (f^\star(x) \mid y)$ donc $(f^\star(x) \mid y) = (x \mid y)$ et puisque ceci vaut pour tout $y \in E$, on obtient $f^\star(x) = x$.
b) Soit $x \in \ker(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.
On a $f(x) = x$ (donc $f^\star(x) = x$) et il existe $a \in E$ vérifiant $x = f(a) - a$.
$\|x\|^2 = (x \mid f(a) - a) = (x \mid f(a)) - (x \mid a)$
Par adjonction $\|x\|^2 = (f^\star(x) \mid a) - (x \mid a) = 0$.
Par suite $\ker(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$.
Enfin par le théorème du rang $\dim \ker(f - \mathrm{Id}) + \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}) = \dim E$ permet de conclure $E = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) φ est une forme trilinéaire alternée sur E de dimension 3 donc φ est proportionnel au déterminant. Pour (i, j, k) base orthonormée,
$\varphi(i, j, k) = (i \mid u(i)) + (j \mid u(j)) + (k \mid u(k)) = \mathrm{tr} u$ donc $\varphi(x, y, z) = \mathrm{tr} u . [x, y, z]$.
b) $(u(x) \wedge y - u(y) \wedge x \mid z) = [u(x), y, z] + [x, u(y), z] = \mathrm{tr} u\,[x, y, z] - [x, y, u(z)] = (x \wedge y, (\mathrm{tr} u.\mathrm{Id} - u)(z))$. L'adjoint de $(\mathrm{tr} u.\mathrm{Id} - u)$ résout notre problème.

Exercice 43 : [énoncé]
(ii)$\Rightarrow$(i) est immédiate via
$(w \wedge x \mid y) = \mathrm{Det}(w, x, y) = -\mathrm{Det}(w, y, x) = -(w \wedge y \mid x)$.
(i)$\Rightarrow$(ii) Supposons $f^\star = -f$.
Dans une base orthonormée directe (i, j, k), la matrice de f est de la forme
$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ car antisymétrique.
Pour $w = -(ak + bj + ci)$, on observe $w \wedge i = -aj - bk$, $w \wedge j = ai - ck$ et $w \wedge k = bi + cj$. Par suite $f(x) = w \wedge x$ pour tout x car les applications linéaires f et $x \mapsto w \wedge x$ coïncident sur une base.

Exercice 44 : [énoncé]
a) $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} = \|u^\star\|_{\mathcal{L}(E)}$ (cf. cours). Rappelons que cette relation se démontre en commençant par établir $\|u\|^2_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \|u^\star \circ u\|_{\mathcal{L}(E)}$.
b) Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id})$.
$\|u^\star(x) - x\|^2 = \|u^\star(x)\|^2 - 2(u^\star(x) \mid x) + \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 - 2(x \mid u(x)) + \|x\|^2 = 0$ car $u(x) = x$. Ainsi $u^\star(x) = x$ et $x \in \ker(u^\star - \mathrm{Id})$. On peut conclure $\ker(u - \mathrm{Id}) \subset \ker(u^\star - \mathrm{Id})$ puis l'égalité par symétrie.
c) Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a) - a$.
$u^\star(x) = x$ donne $u^\star(u(a)) - u^\star(a) = u(a) - a$ puis
$(u^\star(u(a)) - u^\star(a) \mid a) = (u(a) - a \mid a)$ qui conduit à
$\|x\|^2 = \|u(a)\|^2 - 2(u(a) \mid a) + \|a\|^2 = 0$. Ainsi $\ker(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$. De plus, $\dim \ker(u - \mathrm{Id}) + \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = \dim E$ donc $\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = E$.

Exercice 45 : [énoncé]
($\Leftarrow$) Supposons $u + u^\star$ inversible.
Soit $x \in \ker u \cap \mathrm{Im} u^\perp$. On a $u(x) + u^\star(x) = 0$ donc $x = 0$. Par suite $\ker u \cap \mathrm{Im} u^\perp = \{0\}$.
Donc $\dim \ker u + \dim \mathrm{Im} u^\perp \leqslant \dim E$ puis $\dim \ker u \leqslant \dim \mathrm{Im} u$. Par suite $\mathrm{Im} u = \ker u$.

($\Rightarrow$) Supposons $\mathrm{Im} u = \ker u$.
Soit $x \in \ker(u + u^\star)$. $u(x) + u^\star(x) = 0$.
Or $u(x) \in \mathrm{Im} u$ et $u^\star(x) \in \mathrm{Im} u^\star = (\ker u)^\perp = (\mathrm{Im} u)^\perp$ donc $u(x) = u^\star(x) = 0$.
Par suite $x \in \ker u$ et $x \in \ker u^\star = \mathrm{Im} u^\perp = \ker u^\perp$ donc $x = 0$.
Par suite $u + u^\star$ est injectif donc bijectif.

Exercice 46 : [énoncé]
On a immédiatement

$$\ker u \subset \ker(u^\star \circ u)$$

Inversement, si $x \in \ker(u^\star \circ u)$ alors

$$\|u(x)\|^2 = (u(x) \mid u(x)) = (x \mid (u^\star \circ u)(x)) = (x \mid 0) = 0$$

et donc $x \in \ker u$.
Par double inclusion, on obtient

$$\ker u = \ker(u^\star \circ u)$$

Soient $x \in \ker u$ et $y \in \mathrm{Im}(u^\star \circ u)$. On peut écrire $y = u^\star \circ u(a)$ avec $a \in E$ et alors

$$(x \mid y) = (u(x) \mid u(a)) = (0 \mid u(a)) = 0$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}(u^\star \circ u) \subset (\ker u)^\perp$$

Or

$$\dim(\ker u) + \dim(\ker u)^\perp = \dim E$$

et

$$\dim \mathrm{Im}(u^\star \circ u) + \dim \ker(u^\star \circ u) = \dim E$$

donc par égalité des dimensions

$$\mathrm{Im}(u^\star \circ u) = (\ker u)^\perp$$

Exercice 47 : [énoncé]
Soit $x \in \ker f$ et $y = f(a) \in \mathrm{Im} f$.
On a

$$(x \mid y) = (x \mid f(a)) = (f(x) \mid a) = 0$$

Les espaces $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont donc orthogonaux. Ils sont alors en somme directe et puisque la formule du rang donne

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim E$$

on peut affirmer que ces espaces sont supplémentaires.

Exercice 48 : [énoncé]
$(f \circ g)^\star = g^\star \circ f^\star = g \circ f$ donc $(f \circ g)^\star = f \circ g$ si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 49 : [énoncé]
a) f est évidemment un endomorphisme de E et pour $x, y \in E$,

$$(f(x) \mid y) = (x \mid y) + k(x \mid a)(y \mid a) = (x \mid f(y))$$

Ainsi f est autoadjoint (et donc diagonalisable dans une base orthonormée.
b) $f(a) = (1 - k)a$ donc $1 - k \in \mathrm{Sp} f$ et $\mathrm{Vect} a \subset E_{1-k}(f)$.
Pour $x \in \mathrm{Vect}(a)^\perp$, $f(x) = x$ donc $1 \in \mathrm{Sp} f$ et $(\mathrm{Vect} a)^\perp \subset E_1(f)$.
On peut alors conclure que si $k \neq 0$ alors

$$\mathrm{Sp} f = \{1, 1 - k\}, E_{1-k}(f) = \mathrm{Vect} a \text{ et } E_1(f) = (\mathrm{Vect} a)^\perp$$

car la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.
Dans le cas $k = 0$, on a $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 50 : [énoncé]
Si p est une projection orthogonale alors
$\forall x, y \in E, (x \mid p(y)) = (x - p(x) \mid p(y)) + (p(x) \mid p(y)) = (p(x) \mid p(y) - y) + (p(x) \mid y) = (p(x) \mid y)$
donc $p^\star = p$.
Inversement, si $p^\star = p$ alors $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} p^\star = \ker p^\perp$ donc p est une projection orthogonale.

Exercice 51 : [énoncé]
Si λ est valeur propre de f et si $x \neq 0$ est vecteur propre associé alors $(f(x) \mid x) = 0$ donne $\lambda = 0$. Sachant que f est diagonalisable car symétrique et que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$, on peut conclure $f = 0$.

Exercice 52 : [énoncé]
a) $u^\star = u$ donc est diagonalisable dans une base orthogonale.
Si λ est valeur propre de u et x vecteur propre associé

$$\lambda. \|x\|^2 = (u(x) \mid x) = \|f(x)\|^2$$

donc $\lambda \geqslant 0$.
b) $\ker f \subset \ker u$ de manière immédiate.

Soit $x \in \ker u$, on a $(u(x) \mid x) = 0$ ce qui donne $f(x) = 0$ donc $x \in \ker f$.
Ainsi $\ker u = \ker f$.
Soit $y \in \mathrm{Im} u$, $y = u(x)$,

$$\forall a \in \ker f, (y \mid a) = (f(x) \mid f(a)) = 0$$

donc $\mathrm{Im} u \subset \ker(f)^\perp$.
Enfin $\dim \mathrm{Im} u = \dim E - \dim \ker u = \dim E - \dim \ker f = \dim \ker(f)^\perp$, on peut donc conclure.

Exercice 53 : [énoncé]
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et alors

$$u(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n$$

Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Sachant

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

on obtient aisément l'encadrement proposé.

Exercice 54 : [énoncé]
Pour x_0 vecteur propre associée à la valeur propre λ_0 vérifiant $|\lambda_0| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$, $\|u(x_0)\| = |\lambda_0| \|x_0\|$ donc $\|u\| \geqslant \lambda_0$.
Inversement, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de u alors pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $u(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n$ avec λ_i valeur propre associée au vecteur propre e_i.
Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ donc $\|u(x)\| \leqslant |\lambda_0| \|x\|$ et donc $\|u\| \leqslant |\lambda_0|$.

Exercice 55 : [énoncé]
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs vérifiant $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
Soit $V \in \mathcal{V}_p$. Etablissons $\max_{x \in S \cap V} (f(x) \mid x) \geqslant \lambda_p$.
$(f(x) \mid x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Considérons $W = \mathrm{Vect}(e_p, \dots, e_n)$. On a $\dim V = p$ et $\dim W = n - p + 1$ donc $V \cap W$ n'est pas réduit au vecteur nul. Pour $x \in V \cap W \cap S$, on a $(f(x) \mid x) = \sum_{i=p}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_p \sum_{i=p}^n x_i^2 = \lambda_p$ et donc $\max_{x \in S \cap V} (f(x) \mid x) \geqslant \lambda_p$.
Par suite $\min_{V \in \mathcal{V}_p} \max_{x \in S \cap V} (f(x) \mid x) \geqslant \lambda_p$.
Pour $V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \in \mathcal{V}_p$, on a $\forall x \in V \cap S$,
$(f(x) \mid x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_p \sum_{i=1}^p x_i^2 = \lambda_p$ donc $\max_{x \in S \cap V} (f(x) \mid x) \leqslant \lambda_p$ puis $\min_{V \in \mathcal{V}_p} \max_{x \in S \cap V} (f(x) \mid x) \leqslant \lambda_p$ et finalement l'égalité.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Pour $f \in E$, $\Phi(f) \in E$ car $(x, y) \mapsto K(x, y) f(y)$ est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de Φ est évidente.
b) $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_\infty$ et $\|\Phi(f)\|_1 \leqslant \iint_{[0,1]^2} |K(x, y) f(y)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_1$ donc Φ est continue pour $\|\|_\infty$ et $\|\|_1$.
c) $(\Phi(f) \mid g) = \iint_{[0,1]^2} K(x, y) f(y) g(x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (f \mid \Phi(g))$ car $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, K(x, y) = K(y, x)$.
d) Rappelons que l'espace normé $(E, \|\|_\infty)$ est complet.
Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant \Omega^{-1} \|f\|_\infty$.
Pour $h \in E$ et $|\lambda| < \Omega$, L'application $T : f \mapsto \lambda \Phi(f) + h$ est $\lambda\Omega$-lipschitzienne avec $|\lambda\Omega| < 1$. Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application T admet un unique point fixe et donc il existe un unique $f \in E$ vérifiant $h = f - \lambda \Phi(f)$.
e) Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée d'éléments de $\ker(\Phi - \lambda \mathrm{Id})$. Soit $y \in [0, 1]$ fixé et $\varphi : x \mapsto K(x, y)$. On peut écrire $\varphi = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j + \psi$ avec $\psi \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$ et $\mu_j = (f_j \mid \varphi) = \int_0^1 K(x, y) f_j(x) \, \mathrm{d}x = \lambda f_j(y)$. Par orthogonalité $\int_0^1 \varphi^2(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 + \|\psi\|_2^2 \geqslant \sum_{j=1}^p \mu_j^2$. En intégrant on obtient $\iint_{[0,1]^2} K(x, y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \geqslant \sum_{j=1}^p \int_0^1 \lambda^2 f_j^2(y) \, \mathrm{d}y = \lambda^2 p$ car les f_j sont unitaires. Par suite

$\ker(\Phi - \lambda \mathrm{Id})$ est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

Exercice 57 : [énoncé]
a) Considérons l'endomorphisme $u = f^\star \circ f$. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ dans laquelle la matrice de u est diagonale

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$,

$$(f(\varepsilon_i) \mid f(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i \mid u(\varepsilon_j)) = \lambda_j (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = 0$$

Ainsi l'endomorphisme f transforme la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ en une famille orthogonale.
b) M est la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ d'un certain automorphisme f. Par ce qui précède, il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f est une famille orthogonale. Celle-ci ne comporte pas le vecteur nul car f est un automorphisme et donc en posant

$$\varphi_i = \frac{f(\varepsilon_i)}{\|f(\varepsilon_i)\|}$$

on forme une base orthonormée $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ telle que la matrice de l'application linéaire f dans les bases $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \|f(\varepsilon_1)\| & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \|f(\varepsilon_n)\| \end{pmatrix}$$

Par formule de changement de bases orthonormées, on obtient

$$UMV = D$$

avec U, V matrices orthogonales

$$U = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ et } V = {}^t\mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

Si M n'est pas inversible, ce qui précède peut être repris en posant

$$\varphi_i = \frac{f(\varepsilon_i)}{\|f(\varepsilon_i)\|}$$

quand $f(\varepsilon_i) \neq 0$ et choisissant les autres φ_i dans une base orthonormée de $(\mathrm{Im} f)^\perp$ pour former une base orthonormée $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ satisfaisante.
c) On a

$${}^t MM = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Une base orthonormée diagonalisant ${}^t MM$ est formée des vecteurs

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et puisque

$$M\varepsilon_1 = \sqrt{10} \varphi_1 \text{ avec } \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on prend

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$UMV = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 58 : [énoncé]
a) Puisque A et ${}^t A$ commutent, on a $({}^t AA)^p = ({}^t A)^p A^p = 0$ et donc ${}^t AA$ est nilpotente.
D'autre part, la matrice ${}^t AA$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Etant nilpotente, sa seule valeur propre possible est 0 et donc ${}^t AA$ est nulle car semblable à la matrice nulle.
b) En exploitant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|A\|^2 = (A \mid A) = \mathrm{tr}\left({}^t AA\right) = 0$$

et donc $A = 0$

Exercice 59 : [énoncé]
La matrice ${}^t AA$ est symétrique réelle donc diagonalisable (via une matrice de passage orthogonale). Si λ est valeur propre de ${}^t AA$ alors pour X vecteur propre associé, ${}^t X {}^t AAX = \lambda {}^t XX$ et ${}^t X {}^t AAX = {}^t(AX)AX$ donc $\lambda = \frac{(AX|AX)}{\|X\|^2} \geqslant 0$ avec $(. \mid .)$ produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 60 : [énoncé]
a) Pour A inversible
$\det A.\chi_{{}^tAA}(\lambda) = \det(A^tAA - \lambda A) = \chi_{A^tA}(\lambda).\det A$ donc $\chi_{{}^tAA} = \chi_{A^tA}$ puisque $\det A \neq 0$.
Les applications $A \mapsto \chi_{{}^tAA}$ et $A \mapsto \chi_{A^tA}$ étant continues et coïncidant sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer qu'elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont les racines de $\chi_{{}^tAA}$ et la dimension des espaces propres correspondent à la multiplicité des racines respectives de $\chi_{{}^tAA}$.
Puisqu'on a la même affirmation pour A^tA, on peut affirmer que ${}^tAA$ et A^tA sont semblables car toutes deux semblables à une même matrice diagonale.

Exercice 61 : [énoncé]
Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
On a $AX = \lambda X$ et ${}^tX^tA = \lambda^tX$ donc ${}^tXBX = \lambda^tXX$.
B est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable.
Ainsi, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B = PD^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in [\alpha, \beta]$.
En posant $Y = {}^tPX$, on a ${}^tXBX = {}^tYDY$ compris entre α^tYY et β^tYY avec ${}^tYY = {}^tXX$. On peut alors conclure $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Exercice 62 : [énoncé]
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. On a $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ et $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
L'inégalité $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ est bien connue, c'est la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique qui s'obtient par la convexité de l'exponentielle appliquée aux $a_i = \ln \lambda_i$.

Exercice 63 : [énoncé]
a) Soit M solution. On a $M\,({}^tMM) = I_n$ et aussi ${}^tM\,(M^tM) = I_n$.
Ainsi l'inverse de la matrice ${}^tMM$ est égale à M et à ${}^tM$. On en déduit $M = {}^tM$.
b) Soit M solution. La matrice M est donc symétrique et vérifie $M^3 = I_n$.
Puisque $X^3 - 1$ est annulateur de M, 1 est sa seule valeur propre réelle.
Puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Au final M est semblable à I_n donc $M = I_n$.
Réciproque immédiate.

Exercice 64 : [énoncé]
La résolution est évidente si A est inversible puisque la matrice $Q = A^{-1}B$ convient.
Dans le cas général, munissons $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et considérons les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représentés par A et B. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormée on a $uu^\star = vv^\star$. Or il est connu que $r = \mathrm{rg}u = \mathrm{rg}uu^\star$ donc $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}uu^\star$ puis $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}v$.
Puisque $\dim\ker u = \dim(\mathrm{Im}u)^\perp$, il existe $\rho_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ transformant $(\mathrm{Im}u)^\perp$ en $\ker u$. Considérons alors $u' = u\rho_1$. On vérifie $u'u'^\star = uu^\star$ et $\ker u' = (\mathrm{Im}u)^\perp$. De même, on définit $\rho_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tel que $v' = v\rho_2$ vérifie $v'v'^\star = vv^\star$ et $\ker v' = (\mathrm{Im}u)^\perp$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Im}u^\perp = \mathbb{R}^n$. Dans cette base les matrices de u' et v' sont de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A', B' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversibles et vérifiant $A'^tA' = B'^tB'$. Il existe alors $Q' \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R})$ vérifiant $B' = A'Q'$. En considérant ρ l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, on obtient $v' = u'\rho$ avec $\rho \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Il en découle la relation $v = u(\rho_1\rho\rho_2^{-1})$ avec $\rho_1\rho\rho_2^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ qu'il suffit de retraduire matriciellement pour conclure.

Exercice 65 : [énoncé]
M est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de$X^p - 1$, elles ne peuvent donc qu'être 1 ou -1. Par suite $M^2 = I_n$.

Exercice 66 : [énoncé]
Par comparaison de noyau, il est facile d'obtenir : $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}^tAA$.
La matrice ${}^tAA$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc son rang est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité.

Exercice 67 : [énoncé]
$\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_0(J) : x_1 + \cdots + x_n = 0$ et $E_n(J) : x_1 = \ldots = x_n$.

$$D = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{2} & & 0 \\ \vdots & -1/\sqrt{2} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{n} & 0 & & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ conviennent.}$$

Exercice 68 : [énoncé]
Cas $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
Soit u l'endomorphisme $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par M.
Il s'agit d'établir, que u transforme une base orthonormée en une famille orthogonale.
On remarque que
$$(u(x) \mid u(y)) = (u^\star \circ u(x) \mid y)$$
L'endomorphisme $u^\star \circ u$ étant symétrique, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ le diagonalisant. Par le calcul qui précède, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthogonale.
De plus elle ne comporte pas le vecteur nul car $u \in \mathrm{GL}(E)$. Posons alors $\mathcal{B}'$ la famille des vecteurs $u(e_k)/\|u(e_k)\|$.
La famille $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée et la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est diagonale (à coefficients diagonaux strictement positifs).
Une formule de changement de base orthonormée permet alors de conclure.
Cas général : $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ canoniquement représenté par M.
Posons $F = \ker u$ et $G = \mathrm{Im} u$. La matrice de u dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $F^\perp \oplus^\perp F = \mathbb{R}^n$ au départ et dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $G \oplus^\perp G^\perp = \mathbb{R}^m$ à l'arrivée est de la forme
$$M' = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}), r = \mathrm{rg} M$$
L'étude qui précède permet de transformer A en une matrice diagonale D via produit par des matrices orthogonales U et V :
$$UAV = D$$
En introduisant les matrices orthogonales
$$U' = \begin{pmatrix} U & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} V & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$$
on obtient en opérant par blocs
$$U'M'V' = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
Enfin par une formule de changement de bases orthonormées, il existe U'', V'' orthogonales telles que
$$M' = U''MV''$$
et on peut alors conclure.

Exercice 69 : [énoncé]
a) Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
En notant $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A, le coefficient d'indice (i,j) de $D^{-1}AD$ est
$$\lambda_i^{-1}\lambda_j a_{i,j}$$
La matrice $D^{-1}AD$ est alors diagonale si, et seulement si, ses coefficients d'indices $(i,i+1)$ et $(i+1,i)$ sont égaux i.e.
$$\lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}b_i = \lambda_{i+1}^{-1}\lambda_i c_i$$
soit encore
$$\lambda_{i+1}^2 = \lambda_i^2 \frac{c_i}{b_i}$$
En choisissant λ_1 non nul quelconque et en posant
$$\lambda_2 = \lambda_1\sqrt{c_1/b_1}, \dots, \lambda_n = \lambda_{n-1}\sqrt{c_{n-1}/b_{n-1}}$$
on forme une matrice D convenable.
b) $D^{-1}AD$ est symétrique réelle donc diagonalisable et puisque A est semblable à une matrice diagonalisable, elle l'est aussi.

Exercice 70 : [énoncé]
Puisque symétrique réelle, la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ce qui permet d'écrire
$$A = {}^tPDP \text{ avec } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
On a alors
$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}({}^tPD^2P) = \mathrm{tr}(D^2)$$
ce qui fournit la relation proposée.

Exercice 71 : [énoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a de façon immédiate
$$\ker(A - \lambda I_n) \subset \ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1}I_n)$$
Or la matrice A est diagonalisable donc
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \ker(A - \lambda I_n)$$

Puisque les λ^{2p+1} sont deux à deux distincts quand les λ varient et puisque les sous-espaces propres de A^{2p+1} sont en somme directe, on peut affirmer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
Ainsi

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ker(A - \lambda I_n) = \ker(A^{2p+1} - \lambda^{2p+1} I_n)$$

Puisqu'on a la même affirmation pour B, on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ker(A - \lambda I_n) = \ker(B - \lambda I_n)$$

Sachant que les matrices A et B sont diagonalisables et ont les mêmes sous-espaces propres, on peut conclure $A = B$.

Exercice 72 : [énoncé]
Puisqu'il est connu que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, les matrices ${}^tAA$ et A^tA possèdent le même polynôme caractéristique. Ces deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres et ces dernières ont même multiplicité. Puisque ces matrices sont symétriques réelles, elles sont toutes deux orthogonalement diagonalisables et donc orthogonalement semblables à une même matrice diagonale ce qui permet de conclure.

Exercice 73 : [énoncé]
a) Si f est antisymétrie $(f(x) \mid x) = (x \mid f^\star(x)) = -(x \mid f(x))$ donc $(f(x) \mid x) = 0$ pour tout $x \in E$.
Inversement, si pour tout $x \in E$, $(f(x) \mid x) = 0$ alors pour tout $x, y \in E$, $(f(x+y) \mid x+y) = 0$ et en développant et simplifiant on obtient $(f(x) \mid y) + (f(y) \mid x) = 0$ d'où $(f(x) \mid y) = (x \mid -f(y))$ et donc $f^\star = -f$.
b) f est bien un endomorphisme et $(f(x) \mid x) = (u \wedge x \mid x) = 0$.
c) Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E. Compte tenu de son antisymétrie, la matrice de f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.
Pour $u = x.i + y.j + z.k$, la matrice de $x \mapsto u \wedge x$ dans la base (i, j, k) est $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$. Par égalité de représentations matricielles, on peut conclure à l'existence et l'unicité d'un vecteur $u \in E$ tel que $f(x) = u \wedge x$ pour tout $x \in E$.
En l'occurrence $u = -c.i + b.j - a.k$.

Exercice 74 : [énoncé]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.
Si A est inversible alors $\det A \neq 0$ et la relation ${}^tA = -A$ donne $\det A = (-1)^n \det A$ et donc n est pair.
Si A n'est pas inversible, en considérant une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $\ker A$, on peut écrire $A = {}^tPA'P$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et A' antisymétrique de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ avec A'' antisymétrique inversible. Puisque $\text{rg}A = \text{rg}A' = \text{rg}A''$, A est de rang pair.

Exercice 75 : [énoncé]
Soit A une matrice antisymétrique réelle.
Le déterminant de A est le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité. Puisque la matrice A est réelle, ses valeurs propres complexes non réelles sont deux à deux conjuguées et forment donc un produit positif. Il reste à étudier les valeurs propres réelles de A.
Soient λ une valeur propre réelle de A et X est une colonne propre associée.
D'une part
${}^tXAX = \lambda^tXX$
D'autre part
${}^tXAX = -^t(AX)X = -\lambda^tXX$
On en déduit $\lambda = 0$ sachant $X \neq 0$.
Par suite le déterminant de A est positif ou nul.

Exercice 76 : [énoncé]
a) Si λ est valeur propre de u de vecteur propre $x \neq 0$ alors la relation $(u(x) \mid x) = 0$ donne $\lambda \|x\|^2 = 0$ qui entraîne $\lambda = 0$.
Seule 0 peut être valeur propre de u. Par suite un endomorphisme antisymétrique est diagonalisable si, et seulement si, il est nul.
b) L'égalité $(u(x+y) \mid x+y) = 0$ avec $(u(x) \mid x) = (u(y) \mid y) = 0$ donne le résultat.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On sait que

$$a_{i,j} = (e_i \mid u(e_j))$$

donc par la relation précédente $a_{i,j} = -a_{j,i}$ et la matrice A est antisymétrique.
c) D'une part

$${}^t\bar{X}AX = \lambda^t\bar{X}X$$

D'autre part

$${}^t\bar{X}AX = -^t\bar{X}^t\bar{A}X = -^t\overline{AX}X = -\lambda^t\bar{X}X$$

Or, en notant $x_1, \dots, x_n$ les éléments de la colonne X, on a

$$ {}^t\bar{X}X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0 $$

car $X \neq 0$.
On en déduit $\bar{\lambda} = -\lambda$ et donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Exercice 77 : [énoncé]
a) Introduisons une base de E et M et A les matrices de φ et f dans cette base.
La matrice M est symétrique et inversible car φ non dégénérée.
L'hypothèse $\forall x, y \in E$, $\varphi(f(x), y) = -\varphi(x, f(y))$ donne${}^t(AX)MY = -{}^tXMAY$ pour toutes colonnes X, Y et donc ${}^tAM = -MA$ soit encore ${}^t(MA) = -MA$. La matrice MA est antisymétrique donc de rang pair (culture...) et puisque M est inversible A est de rang pair.
b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $f(M) = AM - MA$.
Le commutant de A est le noyau de f et sa codimension est le rang de f.
Considérons $\varphi : (M, N) \to \mathrm{tr}(MN)$. φ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée car $\varphi(M, N) = 0$ pour tout N entraîne $M = 0$.
Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on vérifie aisément $\varphi(f(M), N) = -\varphi(M, f(N))$ et on conclut.

Exercice 78 : [énoncé]
Remarquons pour commencer que, puisque A est antisymétrique, pour toute colonne X, on a $(AX \mid X) = 0$. En effet
$(AX \mid X) = {}^tX{}^tAX = -{}^tXAX = -(X \mid AX) = -(AX \mid X)$.
Etablissons maintenant la propriété en raisonnant par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$, une matrice antisymétrique est nulle et la propriété est vérifiée.
Pour $n = 2$, une matrice antisymétrique est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ et la propriété est vérifiée.
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n \geqslant 2$.
Considérons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$
Si la matrice A est nulle alors le résultat est obtenu.
Si la matrice A n'est pas nulle alors A^2 non plus.
En effet $\mathrm{Im} A = (\ker {}^tA)^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$ et donc $\mathrm{Im} A \not\subset \ker A$.
Puisque ${}^t(A^2) = (-A)^2 = A^2$, la matrice A^2 est diagonalisable.
Soit X_1 un vecteur propre unitaire de A^2 associé à une valeur propre λ non nulle.
La colonne AX_1 est nécessairement non nulle car $A^2X_1 \neq 0$.
Posons X_2 une colonne unitaire colinéaire à AX_1.
On peut écrire $AX_1 = -aX_2$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Les colonnes X_1 et X_2 sont orthogonales en vertu de la remarque préliminaire.
De plus $A^2X_1 = \lambda X_1$ et $A^2X_1 = -aAX_2$ donc $\lambda X_1 = -aAX_2$.
Ainsi AX_2 est colinéaire au vecteur non nul λX_1 ce qui permet d'écrire $AX_2 = bX_1$.
La relation $(A(X_1 + X_2) \mid X_1 + X_2) = (-aX_2 + bX_1 \mid X_1 + X_2) = 0$ donne $-a + b = 0$ et donc $b = a$.
Considérons alors une matrice P orthogonale dont les deux premières colonnes sont X_1 et X_2. Pour celle-ci, la matrice $P^{-1}AP$ est antisymétrique de la forme $\begin{pmatrix} M_a & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & A' \end{pmatrix}$ avec $M_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$
Puisque $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est antisymétrique, on peut exploiter l'hypothèse de récurrence pour rendre celle-ci orthosemblable à une matrice de la forme voulue et conclure.
Récurrence établie